

二本の大型円柱構造物による波の回折に関する研究

梅 田 真三郎^{*} ・ 筧 源 亮^{**}
野 村 勝 美^{*} ・ 藤 井 克 典^{**}

A Study of Wave Diffraction on Two Fixed Vertical Cylinders of Large Diameter

Shinzaburo UMEDA, Motoaki YANO, Katsumi NOMURA
and Katsunori FUJII

ABSTRACT

This study deals with the diffraction of linear plane water waves with two fixed vertical cylinders of large diameter. In consideration of the scale of cylinder separation an approximate solution is proposed. The result of computation by the solution shows characteristics of the interaction of cylinder.

It is discussed that the convergency of the solution with potential functions used a Bessel coordinate transformation is not always sufficient. But the solution proposed is sufficiently convergent and then is verified to be reliable in comparison with the experimental one by visualization of ultrasonic waves.

1. ま え が き

近年、沿岸海域の埋立や海洋開発等によって円島堤や複数の大型円柱構造物が造られるようになった。この場合、円柱径が波長に比較する大きさになると、円柱による波の変形の影響や円柱間の相互干渉等を考慮する必要があるが生じている。従来、この種の問題は、ポテンシャル理論による波の回折問題として取扱われる場合と、波の非線型性を考慮した回折理論を適用して取扱われる場合とがある。たとえば前者に関しては、円柱または円島堤による波の回折を取扱った MacCamy・Fuchs⁽¹⁾ や田中の研究⁽²⁾ などが、

楕円柱構造物による波の反射および回折を取り上げた合田・吉村・伊藤⁽³⁾ らの研究がある。それらは、回折係数がそれぞれ Bessel 関数や Mathieu 関数の級数で表わされることを示している。また任意形状の島堤による波の回折については、井島・周・湯村⁽⁴⁾ らによる Green 関数を導入した Helmholtz 方程式の解を求める方法による研究がある⁽⁵⁾。一方、波の非線型性を回折理論に導入した研究には、入射波を有限振幅波理論である Stokes 波の第 5 次近似解で表示した Chakrabarti⁽⁶⁾ によるものや、せつ動法によって非線型波の回折を第 2 次近似まで求めて、大口

径円柱に作用する波圧・波力に及ぼす波の非線型性の影響を究明した山口・土屋らのものがある。

これらの線型および非線型波の回折理論を適用した研究は、いずれも単一の円柱構造物によるものである。それに対して大楠⁽⁸⁾は、複数本の円柱に働く波力を円柱間の相互干渉をも考慮してポテンシャル理論によって求めた。ポテンシャルの算定にあたっては、各々の反射波が異なった中心座標で表わされているので、ポテンシャル関数に加法定理と名づけた Bessel coordinate transformation を適用することによって中心座標の変換を行なっている。同様に、Spring・Monkmeyer⁽⁹⁾らは、Bessel coordinate transformation を適用してポテンシャル関数を求め、二本の円柱による波の相互干渉を調べた。そのポテンシャルを求めるにあたっての境界条件を適用する際に反射項の未知の係数を逆マトリックスの形で導いている。それぞれの研究における Bessel coordinate transformation とは、考えている座標点に対する中心座標点ならびに別の中心座標点の三点における距離と角度の関係から、Hankel 関数に関する式を Bessel 関数を乗じた Hankel 関数の級数の形で表わす式に変換する方法である。得られた級数には収束性の悪い点が存在している。その他、榎木・中村⁽¹⁰⁾らは、回折理論と比べ解析的に容易である鏡像法によって複数円柱の波力および抗力項の干渉効果を明らかにした。また Massel⁽¹¹⁾は、複素関数の Laurent 級数展開を応用し、任意方向の入射波に対する円柱列の相互干渉や波力を検討した。

以上の研究のうち単一円柱構造物の場合には、その研究目的から理論における波の取扱いが非線型にまで拡大されているけれども、複数本の場合には、それらの研究は非線型波の回折理論の複雑さからいずれも線型のポテンシャル理論が適用され、しかも波長に対して円柱径が比較的小さなものを対象とした研究がほとんどである。波長に対する円柱径の比が大きくなると、線型波の回折理論での Bessel coordinate transformation を適用して導いたポテンシャルの算定においては、特異点の存在や Bessel 関数の性質から解の収束性が悪くなる。このため正しい

解を得ることが非常に難しい。

本研究では、円柱群による波の回折に関して波長に対する円柱径の比が大きい場合の二本の大型円柱構造物による波の回折問題に、線型波の回折理論を適用し厳密に級数解を求め、この厳密解を用いて円柱径の違いによる波の相互干渉を明確にする。またこの級数解と従来の Bessel coordinate transformation によって導いた解との差異を明らかにした。さらにこれらの解析結果は超音波を用いた回折実験により検証を行なった。

2. 理 論 式

円柱が水底にまで達している場合の二本の円柱への入射波を以下のようなポテンシャル理論で考える。図-1に示すような横二列に並

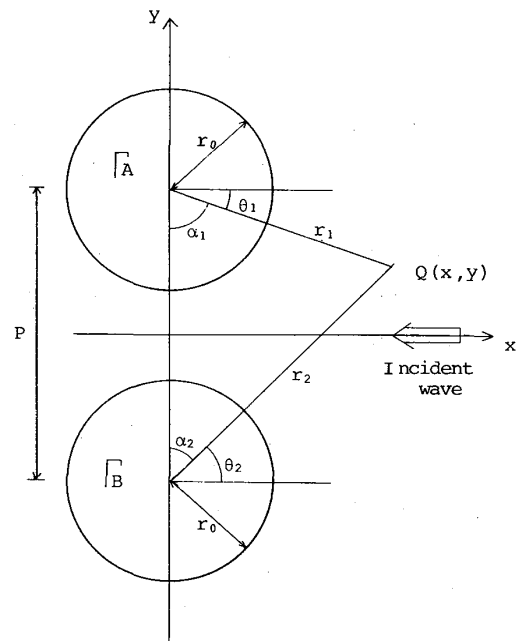


図-1 円柱への波の入射方向と座標系

ぶ円柱に、進行波 $\zeta_{r_0} e^{i(kx + \omega t)}$ が入射した場合の円柱まわりのポテンシャルを同図の座標系に従って求める。ただし、 z を水深方向の上向きを正とする座標軸とし、水深を d 、円柱の半径を r_0 、二本の円柱 A と B の中心間の距離を p とする。以下の文章では円柱の半径を円柱径、円柱の中心間隔を円柱間隔として用いる。また $k \tanh kd = \omega^2/g$ である。

入射波の速度ポテンシャルを

$$\Phi_0 = i\omega \zeta_{r_0} \frac{\cosh k(d+z)}{k \sinh kd} e^{i(kx + \omega t)} \quad (2 \cdot 1)$$

とし、二本の円柱からの反射波のポテンシャルを

$$\Phi = i\omega \zeta_{r_0} \phi(x, y) e^{i\omega t} \frac{\cosh k(d+z)}{k \sinh kd} \quad (2 \cdot 2)$$

とする。ここで Φ は、すでに線型の自由表面条件、水底の条件を満しており、さらにここでは連続の条件および円柱 Γ_A , Γ_B での条件

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial N} \quad (2 \cdot 3)$$

を満足するような ϕ を求めなければならない。
(2・3)式において N は、円柱の表面の法線方向を示す。

円柱より無限遠におけるポテンシャル e^{ikx} を円柱 Γ_A , Γ_B の中心を原点とする円柱座標で表わし、各々を ϕ_0^A , ϕ_0^B とおけば、

$$\begin{aligned} \phi_0^A &= e^{ikr_1 \cos \theta_1} = e^{iR_1 \cos \theta_1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(R_1) e^{in\theta_1} \quad (2 \cdot 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_0^B &= e^{ikr_2 \cos \theta_2} = e^{iR_2 \cos \theta_2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(R_2) e^{in\theta_2} \quad (2 \cdot 5) \end{aligned}$$

となる。ただし $J_n(R)$ は、 n 次の第1種Bessel関数である。

今、 ϕ_0^A が円柱 Γ_A に入射した時の反射波を ϕ_1^A , ϕ_1^A が円柱 Γ_B に入射した時の反射波を ϕ_2^B とし、順次入、反射波を考えていく。同様に、 ϕ_0^B が円柱 Γ_B に入射してから入、反射波を考えると、円柱 Γ_A , Γ_B における入、反射波のポテンシャルを次のようにおくことができる。

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{2j-1} &= \phi_{j-1}^B + \phi_j^A \\ \Psi_{2j} &= \phi_{j-1}^A + \phi_j^B \end{aligned} \right\} \quad (j=2, 3, \dots) \quad (2 \cdot 6)$$

$$(2 \cdot 7)$$

ここで(2・6)式、(2・7)式において、 Γ_A , Γ_B における境界条件を満足するように入射波に対する反射波を順次求めて行き、それぞれ入、反射波を表わす級数が収束すれば、求める速度ポテンシャル ϕ はポテンシャルの重ね合

わせにより、

$$\phi = \sum_{j=1}^{\infty} (\Psi_{2j-1} + \Psi_{2j}) / 2 \quad (2 \cdot 8)$$

で与えられる。

そこで具体的に(2・6)式および(2・7)式で示されるポテンシャルを求めてみる。たとえば Ψ_1 に関しては、入、反射波をそれぞれ微小振幅進行波と円柱からの第1反射波とすると

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \phi_0^A + \phi_1^A \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(R_1) e^{in\theta_1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n H_n^{(2)}(R_1) e^{in\theta_1} \quad (2 \cdot 9) \end{aligned}$$

と表わされる。ここで $H_n^{(2)}(R)$ は、第2種のHankel関数で、以後右肩の(2)を省略して $H_n(R)$ として表わす。ここで境界条件 $[\partial \Psi_1 / \partial R_1]_{R_1=R_0}=0$ より反射項の級数 α_n を求め、 Ψ_1 を導くと、

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(R_1) e^{in\theta_1} \\ &\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} H_n(R_1) e^{in\theta_1} \quad (2 \cdot 10) \end{aligned}$$

となる。ここに $R_0 = kr_0$ である。

同様に Ψ_2 を導くと、次のようになる。

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \phi_0^B + \phi_1^B \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(R_2) e^{in\theta_2} \\ &\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} H_n(R_2) e^{in\theta_2} \quad (2 \cdot 11) \end{aligned}$$

次に Ψ_3 と Ψ_4 については、

$$\begin{aligned} \Psi_3 &= \phi_1^B + \phi_2^A \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} H_n(R_2) e^{in\theta_2} \\ &\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n H_n(R_1) e^{in\theta_1} \quad (2 \cdot 12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_4 &= \phi_1^A + \phi_2^B \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} H_n(R_1) e^{in\theta_1} \\ &\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n H_n(R_2) e^{in\theta_2} \quad (2 \cdot 13) \end{aligned}$$

の形となって、 Ψ_3 と Ψ_4 ともに入、反射項で R_1 ,

R_2 の異なった独立変数を有した形となっている。
さらに Ψ_5, Ψ_6, \dots も Ψ_3 と Ψ_4 と同様な形となる。

これらの Ψ に関して、 Ψ_1 と Ψ_2 と同様に境界条件を適用すれば反射項の未知の係数 α_n を求めることができる。ところが Ψ_1 と Ψ_2 の場合と違って Ψ_3 以下は、それぞれの入、反射項で R_1, R_2 の異なった独立変数を有しているの、境界条件を適用する場合は注意する必要がある。
ここで α_n を決める方法としては、次の二つのケースが考えられる。

Case (I) : ポテンシャル Ψ にそのまま境界条件を適用することにより、その係数 α_n を決定する。

Case (II) : ポテンシャル Ψ をまずBessel coordinate transformation を用い、中心座標変換により変数を減少してから境界条件を適用して係数 α_n を決定する。

これらの方法を以下において試み比較検討した。

概論的に、Case (II) では境界条件の適用が簡単になるが Bessel coordinate transformation を適用した場合、特異点の存在やポテンシャルが二重の級数で表わされるため、円柱径が大きい場合や円柱径と円柱間隔との関係によっては、実際に解を求めていくと級数の収束性が悪い。それに対してCase (I) によってポテンシャル Ψ を導くと、Case (II) と同様に特異点が存在する形となる。

そこで、

- ① 特異点領域を除いてポテンシャル Ψ を求める。
- ② 円柱間隔が円柱径に比べて大きいことから、距離 R の変化に対して角度 θ の変化が小さいと考えるとポテンシャル Ψ を求める。

というようにして検討を行なった。

以上のCase (I) の解を直接偏微分による解とし、そのうち①の解を理論級数解、②の解を理論近似級数解とし、Case (II) の解を座標変換による解と以下呼ぶこととし、これらの解の関係を求めた。

(I) 直接偏微分による解

(2・12) 式および(2・13) 式においてそれぞれの境界条件 $[\partial\Psi_3/\partial R_1]_{R_1=R_0}=0$,
 $[\partial\Psi_4/\partial R_2]_{R_2=R_0}=0$ を考える場合に、それぞれの偏微分を行なう変数に対して円柱の中心からの距離 R や角度 θ が従属変数となっているので注意しなければならない。

たとえば、(2・12)式で示される Ψ_3 に関して R_1 で偏微分を行なうと次のようになる。

$$\frac{\partial\Psi_3}{\partial R_1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (-i)^n \frac{J_n(R_0)}{H_n(R_0)} \right. \\ \left. \times \frac{\partial}{\partial R_1} \left\{ H_n(R_2) e^{in\theta_2} \right\} + \alpha_n H_n(R_1) e^{in\theta_1} \right\} \quad (2 \cdot 14)$$

ここでの偏微分の取扱いとして次のような二つの場合を考える。

① そのまま偏微分を行なった場合

$$\frac{\partial}{\partial R_1} \left\{ H_n(R_2) e^{in\theta_2} \right\} = \\ H_n(R_2) e^{in\theta_2} \frac{\partial R_2}{\partial R_1} + in H_n(R_2) e^{in\theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial R_1} \quad (2 \cdot 15)$$

② 一般に円柱径が大きいために円柱の中心間隔である円柱間隔も大きい。よって(2・14) 式において R_1 の変化に対する θ_2 の変化は小さいと考えると偏微分を行なった場合

$$\frac{\partial}{\partial R_1} \left\{ H_n(R_2) e^{in\theta_2} \right\} = \frac{\partial}{\partial R_1} \left\{ H_n(R_2) \right\} e^{in\theta_2} \\ = H_n(R_2) \frac{\partial R_2}{\partial R_1} e^{in\theta_2} \quad (2 \cdot 16)$$

①および②の場合で導いた理論級数解と理論近似級数解としての Ψ_3 と Ψ_4 は、それぞれ次のようになる。

①の場合

$$\Psi_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (-i)^n \frac{J_n(R_0)}{H_n(R_0)} H_n(R_2) e^{in\theta_2} \right. \\ \left. + \beta_{1,n} i^n \frac{J_n(R_0)}{H_n(R_0)} \cdot \frac{H_n(R_1)}{H_n(R_0)} \right. \\ \left. \times \frac{R_0 - R_1 \cos \alpha_1}{R_3} H_n(R_3) e^{in\theta_3} \right\} \quad (2 \cdot 17)$$

$$\Psi_4 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (-i)^n \frac{J_n(R_0)}{H_n(R_0)} H_n(R_1) e^{in\theta_1} \right.$$

$$+ \beta_{2,n} i^n \frac{J_n(R_0)}{H_n(R_0)} \cdot \frac{H_n(R_2)}{H_n(R_0)} \times \frac{R_0 - R_p \cos \alpha_2}{R_4} H_n(R_4) e^{i n \theta_4} \quad (2 \cdot 18)$$

②の場合

$$\Psi_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (-i)^n \frac{J_n(R_0)}{H_n(R_0)} H_n(R_2) e^{i n \theta_2} + i^n \frac{J_n(R_0)}{H_n(R_0)} \cdot \frac{H_n(R_1)}{H_n(R_0)} \times \frac{R_0 - R_p \cos \alpha_1}{R_3} H_n(R_3) e^{i n \theta_3} \right\} \quad (2 \cdot 19)$$

$$\Psi_4 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (-i)^n \frac{J_n(R_0)}{H_n(R_0)} H_n(R_1) e^{i n \theta_1} + i^n \frac{J_n(R_0)}{H_n(R_0)} \cdot \frac{H_n(R_2)}{H_n(R_0)} \times \frac{R_0 - R_p \cos \alpha_2}{R_4} H_n(R_4) e^{i n \theta_4} \right\} \quad (2 \cdot 20)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \theta_3 &= \pi/2 - \alpha'_2, \sin \alpha'_2 = R_0 \sin \alpha_1 / R_3 \\ \theta_4 &= \pi/2 - \alpha'_1, \sin \alpha'_1 = R_0 \sin \alpha_2 / R_4 \\ R_3 &= \sqrt{R_0^2 + R_p^2 - 2R_0 R_p \cos \alpha_1} \\ R_4 &= \sqrt{R_0^2 + R_p^2 - 2R_0 R_p \cos \alpha_2} \\ \beta_{1,n} &= 1 - i^n \frac{H_n(R_3)}{H_n(R_3)} \times \frac{R_3}{R_p(R_0 - R_p \cos \alpha_1) \sin \alpha_1} \\ \beta_{2,n} &= 1 - i^n \frac{H_n(R_4)}{H_n(R_4)} \times \frac{R_4}{R_p(R_0 - R_p \cos \alpha_2) \sin \alpha_2} \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 21)$$

である。

直接偏微分による②の考え方によれば、比較的簡単に Ψ_5, Ψ_6, \dots に関しても円柱 Γ_A と Γ_B のそれぞれにおいて境界条件を適用して求めることができる。それらの式は、次のような形で二つの一般式で表わすことができる。

$$\Psi_{4j+1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ i^n F_n^{j+1-2}(R_0, R_p, R_3, \alpha_1) \times F_n^{j-1+1}(R_0, R_p, R_4, \alpha_2) \times \{ E_n(R_0, R_3-1) - F_n(R_p, R_{1+2}, \alpha_1) \times E_n(R_0, R_1) \} e^{i n \theta_{5-1}} \}$$

$$\Psi_{4j+1+1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ i^n F_n^j(R_0, R_p, R_3, \alpha_1) \times F_n^j(R_0, R_p, R_4, \alpha_2) \times \{ -E_n(R_0, R_3-1) + F_n(R_0, R_p, R_{1+2}, \alpha_1) \times E_n(R_0, R_1) \} e^{i n \theta_{1+2}} \} \quad (2 \cdot 23)$$

ここで, $j=1, 2, \dots$ に対してそれぞれ $l=1$ および 2 であり, 関数 E_n と F_n は

$$E_n(R_0, R_1) = \frac{J_n(R_0)}{H_n(R_0)} H_n(R_1) \quad (l=1, 2) \quad (2 \cdot 24)$$

$$F_n(R_0, R_p, R_j, \alpha_l) = \frac{H_n(R_j)}{H_n(R_0)} \cdot \frac{R_0 - R_p \cos \alpha_l}{R_j} \quad ((j, l) = (3, 1), (4, 2)) \quad (2 \cdot 25)$$

で表わされる。

(II) 座標変換による解

Bessel coordinate transformation を適用した一般式としては図-2に示す関係に対して次のとおりである。

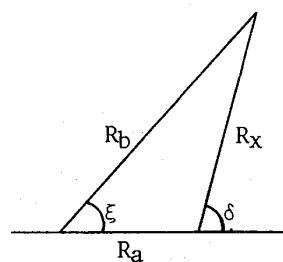


図-2 Bessel coordinate transformation における距離と角度

$$H_n(R_x) e^{\pm i n \delta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n(R_a) H_{n+m}(R_b) e^{\pm i m \xi} \quad (R_a < R_b) \quad (2 \cdot 26)$$

$$H_n(R_x) e^{\pm i n \delta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n(R_b) H_{n+m}(R_a) e^{\pm i m \xi} \quad (R_a > R_b) \quad (2 \cdot 27)$$

本研究では、 R_1 と R_2 の大小および角度 α_1 , α_2 によって図-3のような5つの領域で Bessel coordinate transformation の適用後の式が異なってくる。それぞれの領域における変形関数を表-1に示す。なお、図-3および表-1における R_p は、 $R_p = k_p$ である。

Ψ_1 と Ψ_2 に関しては、すでに(2・10)および(2・11)式で示されているとおりである。

(2・12) および (2・13) 式で示される Ψ_3 と Ψ_4 を Bessel coordinate transformation によって変形し、境界条件 $[\partial\Psi/\partial R]_{R=R_0}=0$ を適用

することによって求めた結果、 Ψ_3 と Ψ_4 に関して図-3の領域 [I] では次のように表わされる。

$$\begin{aligned}\Psi_3 &= \phi_1^B + \phi_2^A \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ (-i)^n \frac{J_n(R_0)}{H_n(R_0)} J_m(R_1) \right. \\ &\quad \times H_{n+m}(R_p) e^{i(m\theta_1 + \frac{n-m}{2}\pi)} \\ &\quad + i^n \frac{J_n(R_0)}{H_n(R_0)} \cdot \frac{H_n(R_1)}{H_n(R_0)} \\ &\quad \times J_m(R_0) H_{n+m}(R_p) e^{i(m\theta_1 + \frac{n-m}{2}\pi)} \left. \right\} \\ &\quad (2 \cdot 28)\end{aligned}$$

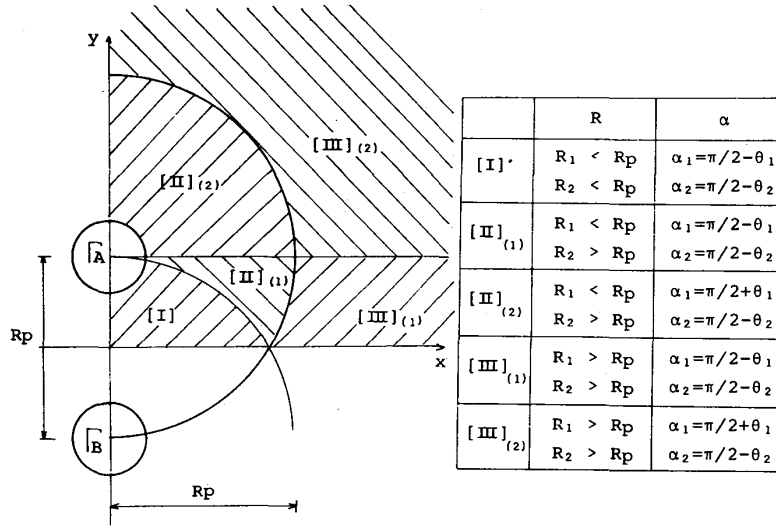


図-3 円柱からの距離Rと角度 α による領域分け

表-1 各領域における Bessel coordinate transformation を適用した場合の変形関数

領域	原関数	$H_n(R_2)e^{in\theta_2}$	$H_n(R_1)e^{in\theta_1}$
[I]	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(R_1) H_{n+m}(R_p) e^{i\{m\theta_1 + \frac{n-m}{2}\pi\}}$	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(R_2) H_{n+m}(R_p) e^{i\{m\theta_2 + \frac{n-m}{2}\pi\}}$	
[II] (1)	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(R_1) H_{n+m}(R_p) e^{i\{m\theta_1 + \frac{n-m}{2}\pi\}}$	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(R_p) H_{n+m}(R_2) e^{i\{\frac{m}{2}\pi - (m+n)\theta_2\}}$	
[II] (2)	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(R_1) H_{n+m}(R_p) e^{i\{\frac{n-m}{2}\pi - m\theta_1\}}$	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(R_p) H_{n+m}(R_2) e^{i\{(m+n)\theta_2 - \frac{m}{2}\pi\}}$	
[III] (1)	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(R_p) H_{n+m}(R_1) e^{i\{\frac{m}{2}\pi - (m+n)\theta_1\}}$	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(R_p) H_{n+m}(R_2) e^{i\{\frac{m}{2}\pi - (m+n)\theta_2\}}$	
[III] (2)	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(R_p) H_{n+m}(R_1) e^{i\{\frac{m}{2}\pi + (m+n)\theta_1\}}$	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(R_p) H_{n+m}(R_2) e^{i\{(m+n)\theta_2 - \frac{m}{2}\pi\}}$	

$$\begin{aligned} \Psi_4 &= \phi_1^A + \phi_2^B \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ (-i)^n \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} J_m(R_2) \right. \\ &\quad \times H_{n+m}(R_p) e^{i(m\theta_2 + \frac{n-m}{2}\pi)} \\ &\quad + i^n \frac{J_n'(R_0)}{H_n'(R_0)} \times \frac{H_n(R_2)}{H_n'(R_0)} J_m'(R_0) \\ &\quad \times H_{n+m}(R_p) e^{i(m\theta_2 + \frac{n-m}{2}\pi)} \left. \right\} \end{aligned} \quad (2 \cdot 29)$$

Ψ_5, Ψ_6, \dots 以下のポテンシャル Ψ に関する式は、直接偏微分による理論級数解と同様にここでの誘導を省略する。

3. 理論近似級数解による計算例

理論式における(2・22)式から(2・25)式で示されるような一般式を比較的簡単に誘導することができた理論近似級数解によって、実際に種々の円柱径に対して計算を行なってみた。(2・8)式から求まる速度ポテンシャル ϕ の絶対値 $|\phi|$ を回折係数 K_d として、円柱間隔 $p=2.0L$ に対して円柱径 $r_0=L/6, L/4, L/3, L/2$ の4種類の構造物の前面および背後の領域で波がどのように変形し、相互干渉を起こすかを調べてみた。ここに L は波長である。その計算結果を考察するにあたって、級数解の各ポテンシャルの収束性や円柱径の違いによる考慮すべきポテンシャルのとりべき項数などの検討を円柱前面領域で試みた。

(1) 指数 n に関する級数解の収束性

(2・8)式で表わされる速度ポテンシャル ϕ は、 Ψ_1, Ψ_2, \dots などの各ポテンシャルの和となっている。ここでの各ポテンシャルは、級数の形で表わされているが、従来はこのような級数の算定においては、構造物と波長との大小比較や円柱関数の性質などから有限項で打ち切られたり、近似的な置き換えがみられる^{(2), (4), (8)}。

ところが、円柱径が大きくなって波長程度になった場合には、どのような有限項で打ち切ればよいかを決定することが難しい。そこで今回は、級数が収束するまで各ポテンシャルを求めてみた。

4種類の円柱径に対して、各ポテンシャルが収束するまでの指数 n の値を種々の座標点にて求めた。その級数の収束判定は、ポテンシャルの値が 10^{-5} 以下となった場合とした。収束までの指数 n の絶対値 $|n|$ を繰返し回数とすると、 Ψ_1 と Ψ_2 に関する繰返し回数が最も多く、 Ψ_3 と Ψ_4 に至っては急激にその回数が少なくなる。また Ψ_1 と Ψ_2 に関する繰返し回数は、円柱径による違いがほとんどなく、むしろ円柱の中心からの距離 R にほぼ比例している。その結果を図-4に示すと、円柱近傍を徐いてはほぼ距離に比例しているのがわかる。

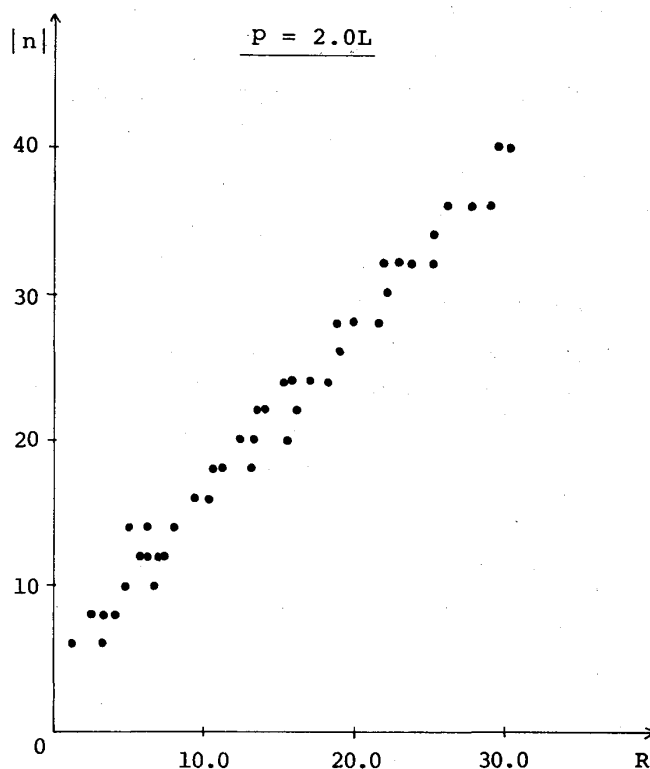


図-4 円柱の中心からの距離に対する繰返し回数

一方、 Ψ_3 と Ψ_4 に関する繰返し回数は、 Ψ_1 と Ψ_2 とは逆に円柱からの距離に対してほとんど変化はなく、円柱径に対して少しずつ異なる。たとえば円柱径 $r_0=L/6$ では繰返し回数が3あるいは4で、 $r_0=L/2$ でのそれが7前後である。

これらの繰返し回数は、 Ψ_1 と Ψ_2 の結果などから各ポテンシャルにおける入射項に大いに関係していることがわかる。

(2) 円柱径の違いによる考慮すべき ポテンシャルの項数

円柱への入、反射を円柱の相互干渉の形で考慮し、 Ψ_1, Ψ_2, \dots というように各ポテンシャルを順次求めて速度ポテンシャル ϕ を算定するにあたっては、ポテンシャル Ψ の項数 j をどこで打ち切るべきかが問題となる。そこで円柱径の違いによってどの程度まで Ψ の項数を求めるべきかを検討してみた。その打ち切るべき最終ポテンシャル Ψ_j を以下ではポテンシャル項数と呼ぶことにする。計算機の容量等から今回は、最大 Ψ_{16} まで求めてみた。

ポテンシャル Ψ_1 から偶数項目のポテンシャル $\Psi_2, \Psi_4, \Psi_6, \dots, \Psi_{16}$ までのそれぞれのポテンシャルの累計をとっていき、前偶数項までの累計値の絶対値と次の偶数項までの絶対値との比 ϵ が1%以内になるポテンシャル項数 Ψ_j を円柱径 $r_0 = L/6, L/4, L/3, L/2$ の場合について求めた。その1例として $r_0 = L/6$ と $r_0 = L/3$ の場合を図-5, 6に示す。

y 座標点の違いを考慮して円柱 Γ_A の中心からの距離 R_1 に対してポテンシャル項数をプロットしたので、座標点が異なっても距離とポテンシャル項数が同じものがあるため図では記号が重なったものもある。ポテンシャル項数は、円柱からの

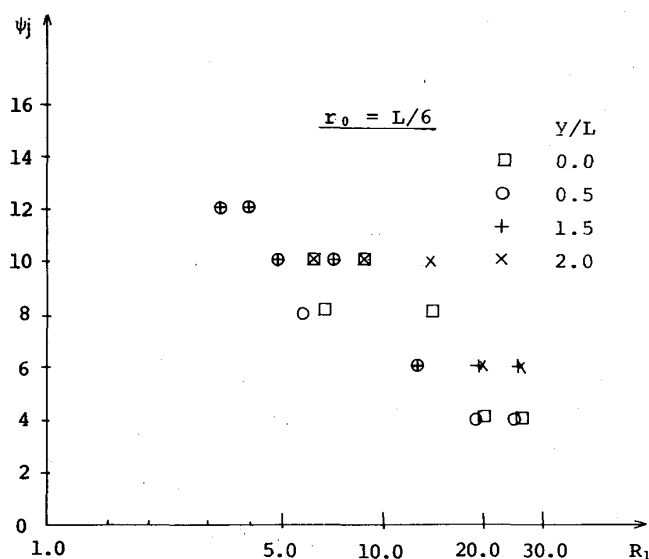


図-5 円柱 Γ_A の中心からの距離に対する
ポテンシャル項数
(円柱径 $r_0 = L/6$ の場合)

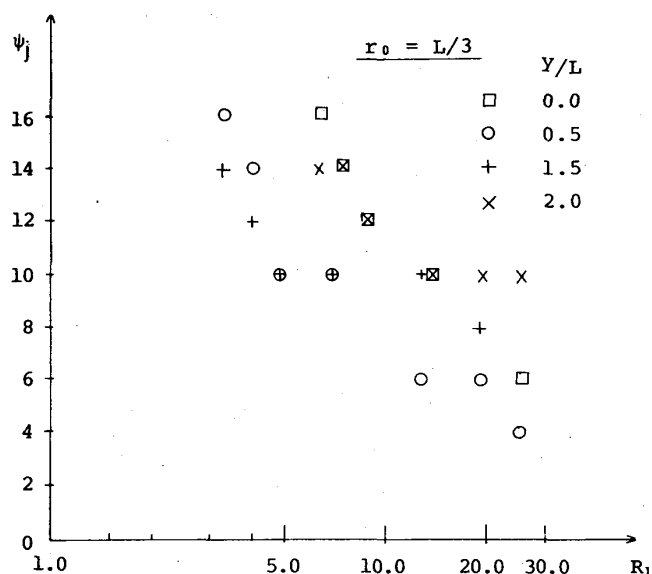


図-6 円柱 Γ_A の中心からの距離に対する
ポテンシャル項数
(円柱径 $r_0 = L/3$ の場合)

距離の対数にはほぼ逆比例しているが、その距離が1.0波長($R_1 = 6.28$)から3.0波長($R_1 = 18.85$)程度のところでは同じポテンシャル項数に対する距離に幅がある。すなわちこのことは、ポテンシャル項数が円柱の中心からの距離ばかりでなく方向にも関係していることが想像される。その他 $r_0 = L/4, L/2$ も同様の傾向を示している。しかし、円柱径が大きくなった円柱近傍では、考慮すべきポテンシャル項数が Ψ_{16} の場合がみられる。これは、 ϵ で示されるポテンシャル項数に対しての回折係数の変化を1%以内に厳しく限定しているためによるものである。

これらの円柱径 $r_0 = L/6$ から $r_0 = L/2$ までの円柱からの距離に対するポテンシャル項数の関係から、円柱からの距離に対する考慮すべき最小ポテンシャル項数を示したのが図-7である。この図からも明らかなように、円柱からの距離の対数に逆比例し、円柱径の増大とともに考慮すべきポテンシャル項数が増えていっていることがわかる。

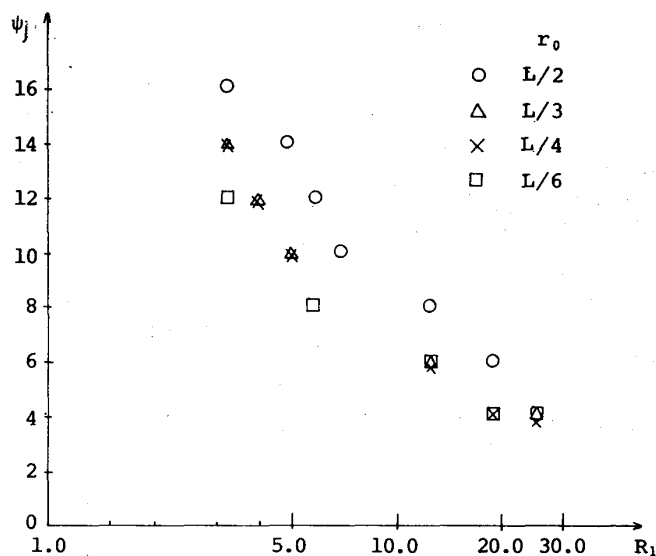


図-7 円柱 Γ_A の中心からの距離に対する最小ポテンシャル項数

(3) 計算例の考察

円柱径 $r_0 = L/6, L/4, L/3, L/2$ の4種類についての回折係数、水面変動量および位相角を求めた。なお円柱間隔はどの場合も $p = 2.0L$ である。また計算座標点間隔は、円柱前面および背後の領域とともに x 方向については1波長まで0.1波長間隔で、1波長以上は0.5波長間隔で4波長まで求めた。 y 方向については、0.25波長間隔で2波長まで求めた。

まず回折係数の分布状況からの円柱による波の相互干渉の様子をみてみよう。図-8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15に円柱径 r_0 が $L/6, L/4, L/3, L/2$ である単一円柱と二本の円柱の場合の回折係数の分布を示した。今回の座標軸のとり方からその分布は、 x 軸に関して対称であるので円柱 Γ_A を中心とした領域を示す。

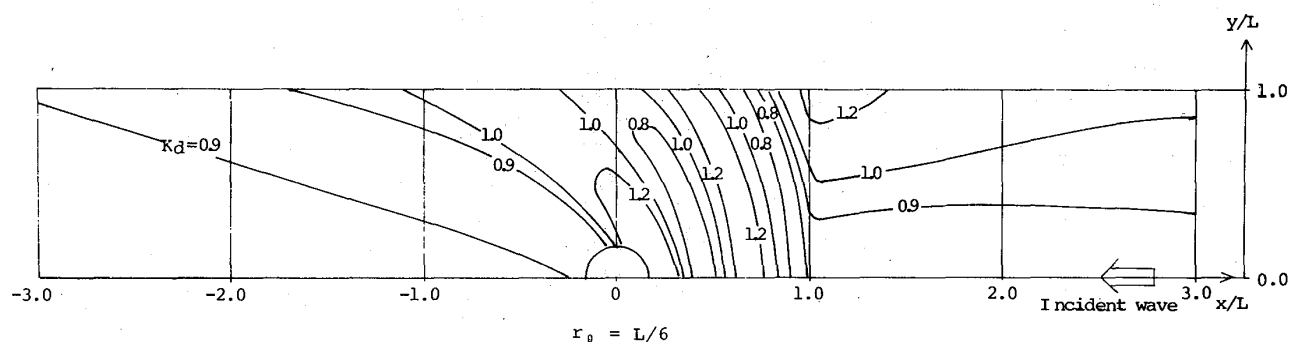


図-8 回折係数の分布 (円柱径 $r_0 = L/6$ の単一円柱の場合)

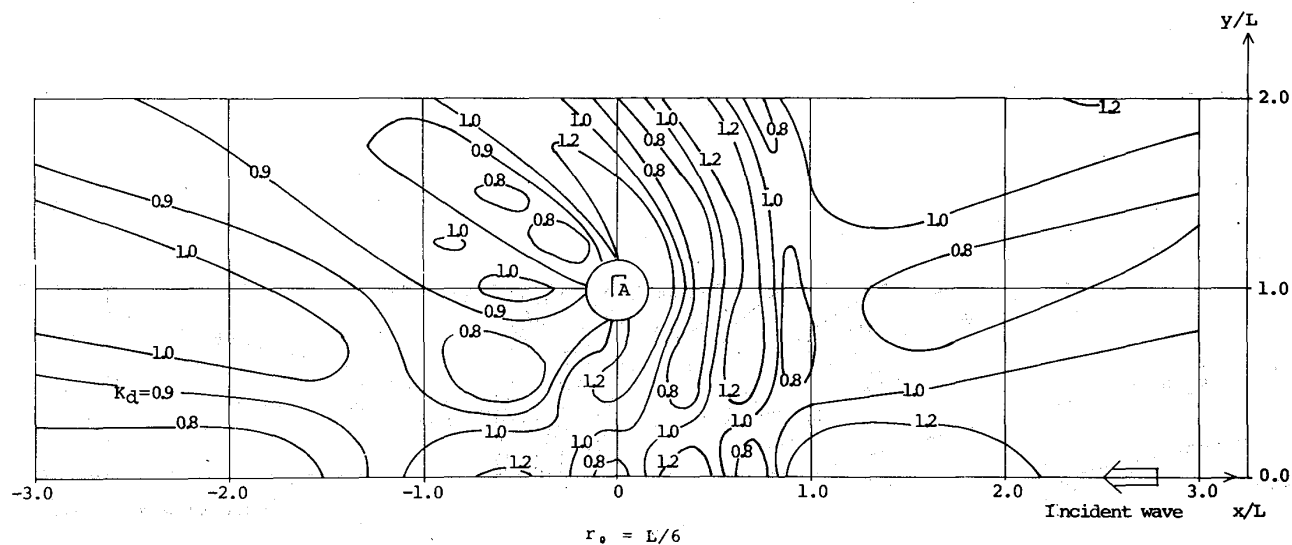


図-9 回折係数の分布 (円柱径 $r_0 = L/6$ の二本の円柱の場合)

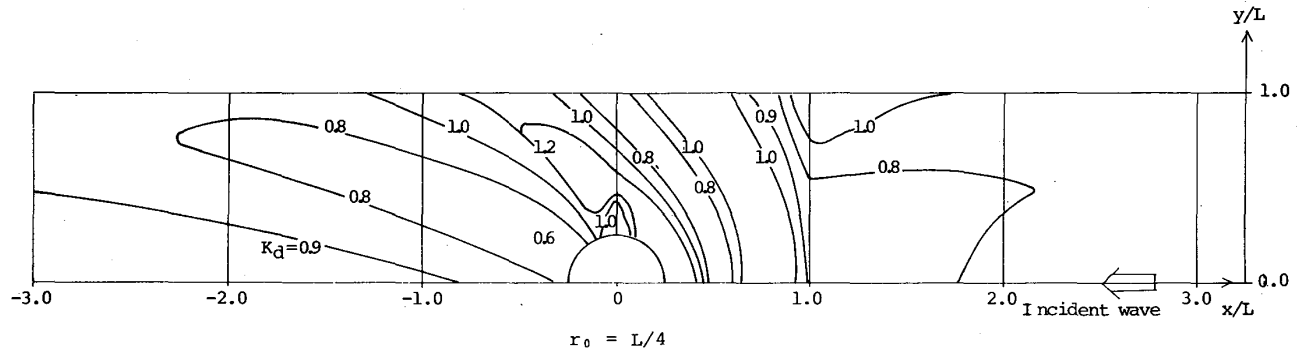


図-10 回折係数の分布 (円柱径 $r_0 = L/4$ の単一円柱の場合)

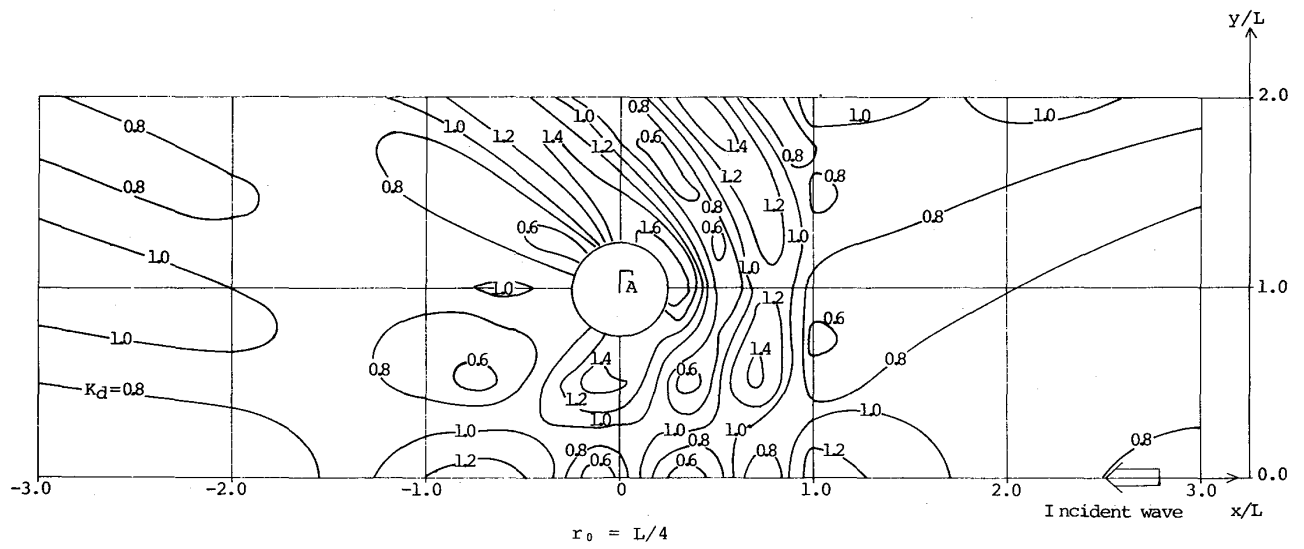


図-11 回折係数の分布 (円柱径 $r_0 = L/4$ の二本の円柱の場合)

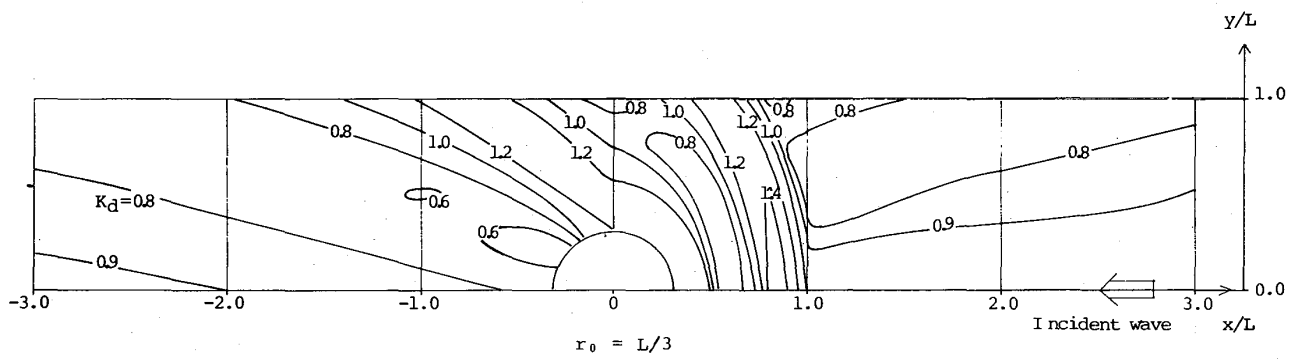


図-12 回折係数の分布 (円柱径 $r_0 = L/3$ の単一円柱の場合)

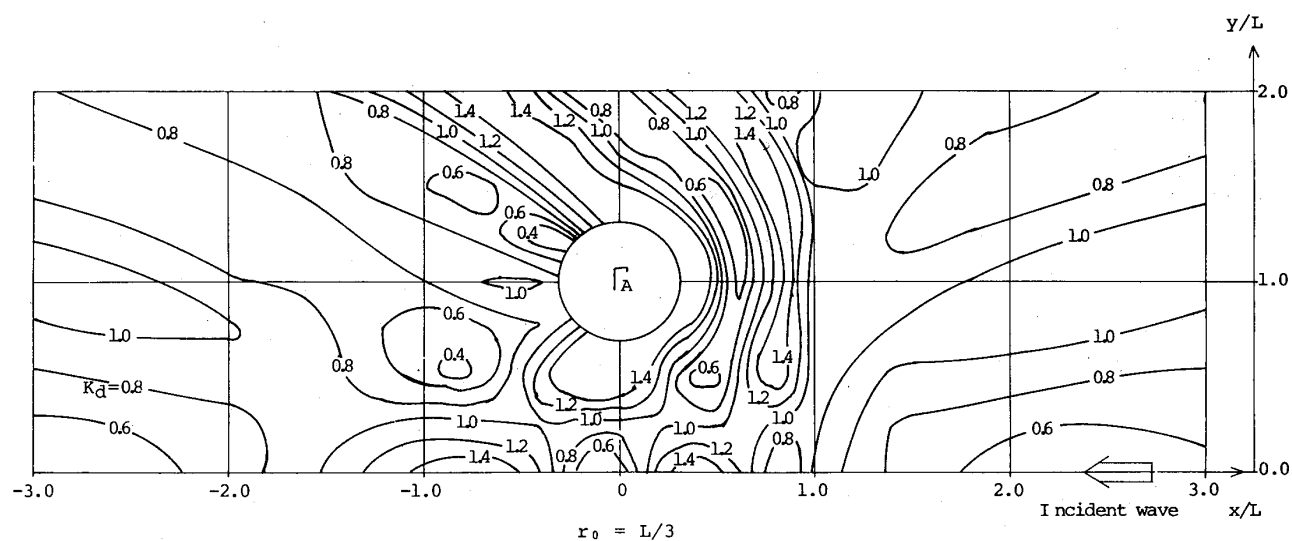


図-13 回折係数の分布（円柱径 $r_0 = L/3$ の二本の円柱の場合）

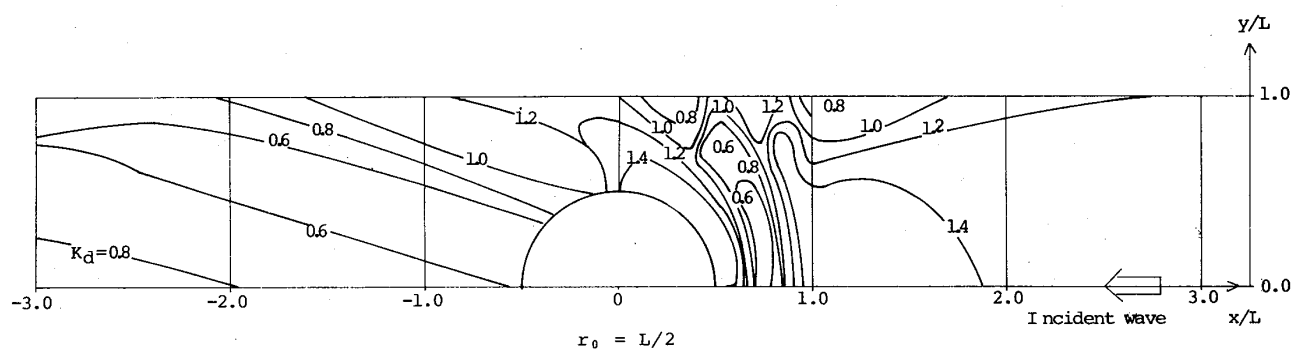


図-14 回折係数の分布（円柱径 $r_0 = L/2$ の単一円柱の場合）

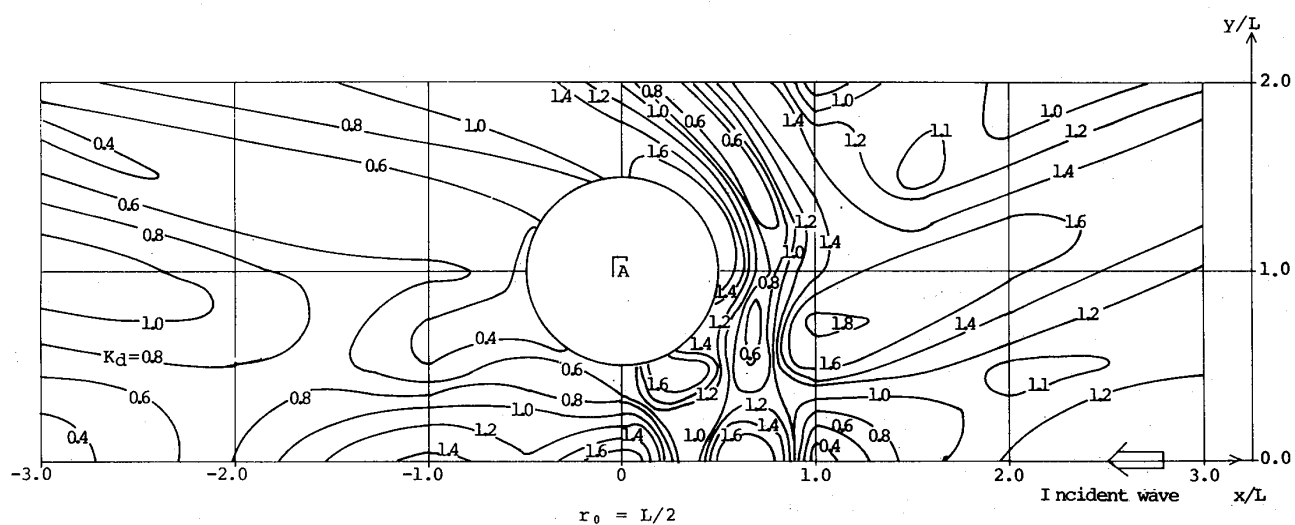


図-15 回折係数の分布（円柱径 $r_0 = L/2$ の二本の円柱の場合）

その結果をみると、二本の円柱の場合どの円柱径に対しても円柱周辺、特に前面領域では回折係数の分布が、円柱の中心 $y/L=1.0$ を軸としてほぼ対称となっている。すなわち前面領域では、円柱前面 1.0 波長程度までその分布は対称となっている。単一円柱の結果と比べてみると、二本の場合の円柱周辺 1.0 波長程度までの回折係数の分布は、 $r_0 = L/4$ の場合には単一円柱との結果とほぼ同じである。 $r_0 = L/2$ の場合では、わずかつ異なっているが似かよっているところも多い。 $r_0 = L/6$ と $r_0 = L/3$ の場合も、それぞれ $r_0 = L/4$ と $r_0 = L/2$ の場合とほぼ同じ結果となっている。しかし、前面および背後の領域ともに二本の円柱の場合、円柱 Γ_A から遠ざかるにつれて $y/L=1.0$ を軸とした対称性がくずれてきており、特に $r_0 = L/3$ から $r_0 = L/2$ に至ってそれが顕著となっている。

次に両円柱にはさまれ、その中央に位置する $y/L=0.0$ 上における前面および背後の領域において入射波高 η_I に対する水面変動 η を調べてみた。入射波の方向を図-1のようにとると、その比は

$$\eta / \eta_I = e^{-ikx} \phi(x, y) \quad (3 \cdot 1)$$

となる。

その結果、(3・1)式の実部の変動状況を図-16に示す。この場合、単一円柱の場合との比較のために破線でその結果も重ねて図に示している。ただし単一円柱の場合は、円柱の中心から y 方向に 1 波長離れた座標点での値である。円柱の近傍における変動や円柱径の違いによる変動をみていくと、前述の回折係数からの考察結果とほぼ同じようなことが言える。単一円柱の場合の結果と比べると、円柱近傍では円柱径 r_0 が $L/3$ 以上になると変動差が顕著となり、また円柱から遠ざかった領域では、円柱径 r_0 が $L/4$ 以上で変動差がはっきりとあらわれている。また円柱径 r_0 が $L/2$ に関して単一円柱および二本の円柱の場合の水面変動状況を図-17に示す。図の中央付近の線が引かれていないのは円柱があるためである。破線で示す単一円柱の場合は、円柱の中心軸 $y/L=1.0$ で対称となっている。破線と二本の円柱の場合の実線を

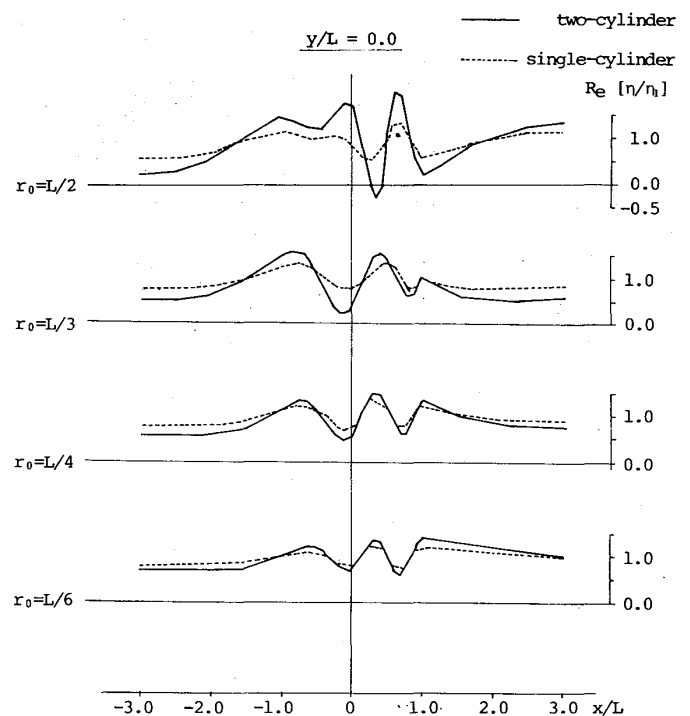


図-16 入射波に対する水面変動の比較

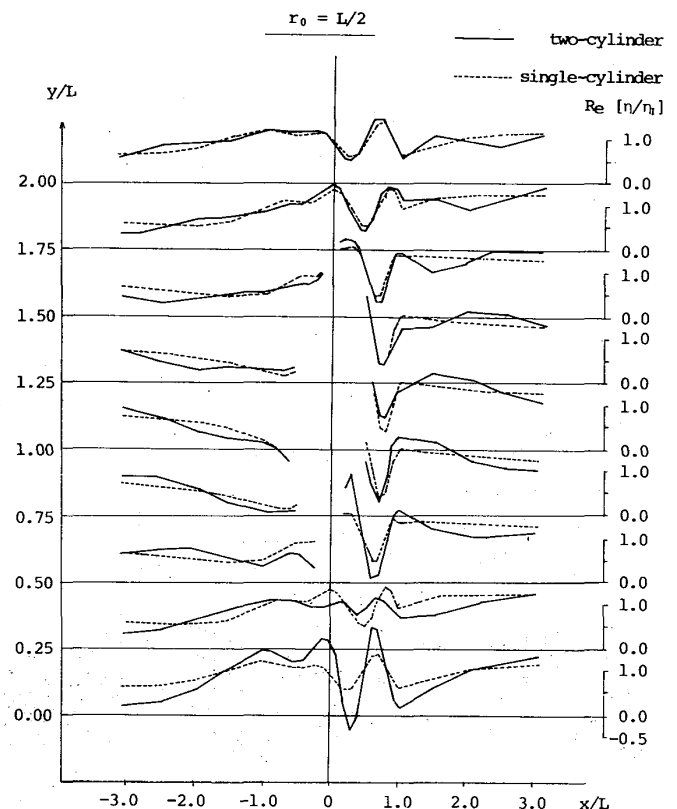


図-17 入射波に対する水面変動
(円柱径 $r_0 = L/2$ の場合)

比べると、円柱による相互干渉の程度がよくわかる。 y の正の方向に向うにつれて、すなわち円柱 Γ_B から遠ざかるにつれて実線と破線との差が小さくなり、円柱 Γ_B の影響が小さくなっているのがわかる。また円柱 Γ_A の周辺1.0波長程度までは実線と破線の差が小さいが、遠方に行くにしたがってその差がはっきりしてきている。これらのことは前述の回折係数の考察結果を妥当なものとしている。

さらに、次のような位相角の差で結果を考察してみた。

$$\gamma = \arg \{ \eta / \eta_1 \} \text{two-cylinder} - \arg \{ \eta / \eta_1 \} \text{one-cylinder} \quad (3 \cdot 2)$$

図-16と同様の座標位置の結果を図-18に示す。この図は、二本の円柱と単一円柱とのそれぞれ

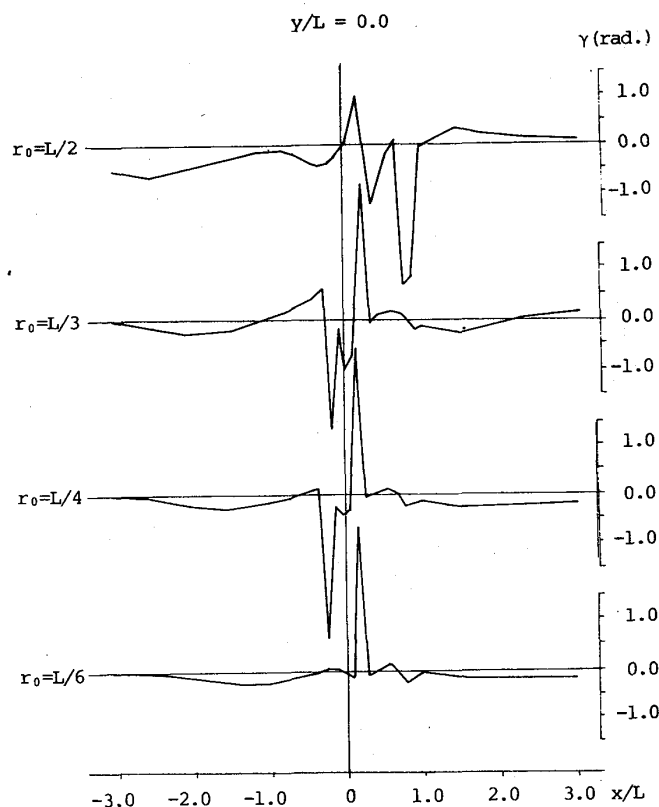


図-18 単一円柱の場合と二本の円柱の場合の位相角の差

れの位相角の差でもって図に表わしているの、急激に大きな位相差が生じてきているところもあるが、円柱径の違いによって位相差の変化が

みられる。円柱径 r_0 が $L/2$ に至ってはその変化が大きく、また円柱背後の領域では円柱から遠く離れた領域でもその変化が大きい。

以上のように、二本の円柱による波の相互干渉について、単一円柱の場合の結果を基準として回折係数の分布や水面変動および位相角の変化などから検討してみた。その結果、今回のような円柱間隔を2波長ととった場合には、円柱径を変えても円柱周辺1波長程度まではその円柱による波の変形が支配的であって、もう一方の円柱の影響をあまり受けないようである。しかしながら、円柱径 r_0 が $L/3$ 以上の大きな円柱径になると、円柱周辺1波長前後からそれより遠方の領域でもう一方の円柱の影響を強く受けだすことが明らかとなった。

4. 座標変換による解と 直接偏微分による解との比較

前章までで大型円柱構造物の場合円柱間隔が円柱径に比べて大きいことから理論近似級数解を導き、その解の特性を検討し、計算例を示した。ここで理論近似級数解の適用限界やその他の解との差異を明確にするために、従来からよく用いられている座標変換による解の特性をまず明らかにし、つづいてその座標変換による解や直接偏微分による理論級数解とを以下で比較検討してみた。

(1) 座標変換による解の収束性

a) Bessel coordinate transformation を適用した式について

表-1に示される図-3の各領域における Bessel coordinate transformation を適用した場合の変形関数は、級数の形で表わされているので原関数と変形関数の間の等式が成り立っているかどうかを調べてみた。その結果、指数 n における $n=0, \pm 1, \pm 2$ などについては、すべて成立することがわかった。

指数 n の絶対値 $|n|$ の値を大きくしていくと、指数 m に関する級数項における距離 R が大きい限り等式として成立するけれども、 R が大きくなると等式としては厳密には成立しなくなる。 $R1$ に対しては、 $|n|$ が6程度までの

どの n に対しても等式として成り立つが, R_1 に比べて大きな値をとる R_2 に対しては, $|n|$ が増加するにつれて計算上の誤差も考慮すべきであるが等式としては成立せず, 左辺と右辺との値の差が大きくなっていく。

指数 m に関してこれら関数の級数の収束状況を調べてみると, R が小さいときには数項程度で収束するが, R が大きくなるにつれて収束するまで数十項を必要とする。また $|n|$ が大きくなると, これら級数関数の収束性が悪くなる。

結局, R が大きくなると, あるいは $|n|$ が大きくなると, 指数 m に関する級数の収束性を悪化させ, さらに $J_m(R)$ や $J_{n+m}(R_p)$ 等の値の減少に伴う誤差が累積されていくために原関数と変形関数の間の等式が成立しなくなると考えられる。

さらに, 実際のポテンシャル Ψ_3 と Ψ_4 を算定するにあたっては, $J_n(R_0)/H_n(R_0)$ が定数として関係してくる。この値は, R_0 が小さければ $|n|$ の増大とともに急激に小さな値をとるため, 前述の場合以上に等式として成立しなくなっていく。ところが, (2・28) 式で示されるような Ψ_3 に関しては, R_1 がそれほど大きくない限り $|n|$ が比較的小さい場合に収束しているので問題にならない。たとえば円柱径 $r_0=L/6$ 円柱間隔 $p=2.0L$ で n が ± 2 , $r_0=L/3$, $p=2.0L$ で n が ± 3 程度で収束しているので問題にならない。

b) ポテンシャル Ψ の収束および発散

Bessel coordinate transformation を適用して導いた (2・28) 式と同様に図-3 に示す各領域での Ψ_3 と Ψ_4 をそれぞれ求めると, 次のような二つのタイプの Bessel 関数と Hankel 関数の積の形で表わされる。これらの二つのタイプについてその収束および発散を調べてみた。

(i) $[J_m(R) \times H_{n+m}(R_p)]$ 型

この型のポテンシャル式は, 一般に,

$$\Psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ (-i)^n \frac{J_n(R_0)}{H_n(R_0)} \times J_m(R) H_{n+m}(R_p) e^{i\Theta} \right. \\ \left. + i^n \frac{J_n(R_0)}{H_n(R_0)} \cdot \frac{H_n(R)}{H_n(R_0)} \right.$$

$$\left. \times J_m(R_0) H_{n+m}(R_p) e^{i\Theta} \right\} \quad (4 \cdot 1)$$

で表わされる。

(ii) $[J_m(R_p) \times H_{n+m}(R)]$ 型

この型のポテンシャル式は, 一般に,

$$\Psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ (-i)^n \frac{J_n(R_0)}{H_n(R_0)} \times J_m(R_p) H_{n+m}(R) e^{i\Theta} \right. \\ \left. + i^n \frac{J_n(R_0)}{H_n(R_0)} \cdot \frac{H_n(R)}{H_n(R_0)} \times J_m(R_p) H_{n+m}(R_0) e^{i\Theta} \right\} \quad (4 \cdot 2)$$

で表わされる。ここに Θ は, n, m および θ_1 あるいは θ_2 で表わされるものである。

それぞれの型に属する領域とポテンシャル Ψ を分類すると次のようになる。タイプ (i) に属するものは, 図-3 の領域 [I] の Ψ_3, Ψ_4 および領域 [II](1), [II](2) の Ψ_3 である。それに対してタイプ (ii) に属するものは, 領域 [II](1), [II](2) の Ψ_4 および [III] の Ψ_3, Ψ_4 である。

(4・1) および (4・2) 式で表わされる級数が収束するかどうかを一般的に示すことは困難であるので, それぞれの式の入射項と反射項における各々の Bessel 関数や Hankel 関数の性質および値の変化などから級数が収束するか, あるいは発散するかを調べた。

いま,

$$\frac{n N_n(R_0) - R_0 N_{n+1}(R_0)}{n J_n(R_0) - R_0 J_{n+1}(R_0)} = \mu_n \quad (4 \cdot 3)$$

とおくと, (4・1) および (4・2) 式における次の各式は,

$$\frac{J_n(R_0)}{H_n(R_0)} = \frac{1}{1 + \mu_n^2} + i \frac{\mu_n}{1 + \mu_n^2} \quad (4 \cdot 4)$$

$$\frac{J_n(R_0)}{H_n(R_0)} \cdot \frac{H_n(R)}{H_n(R_0)} = \frac{R_0}{(1 + \mu_n^2)^2 \{ n J_n(R_0) - R_0 J_{n+1}(R_0) \}} \\ \times \{ (1 - \mu_n^2) J_n(R) + 2 \mu_n N_n(R) + i(1 + \mu_n^2) J_n(R) \} \quad (4 \cdot 5)$$

で表わされる。

それ以外の式は、次のように変形される。

$$J_m(R)H_{n+m}(R_p) = J_m(R)J_{n+m}(R_p) - iJ_m(R)N_{n+m}(R_p) \quad (4 \cdot 6)$$

$$J_m(R_0)H_{n+m}(R_p) = J_{n+m}(R_p) \{mJ_m(R_0) - R_0J_{m+1}(R_0)\} / R_0 - iN_{n+m}(R_p) \{mJ_m(R_0) - R_0J_{m+1}(R_0)\} / R_0 \quad (4 \cdot 7)$$

$$J_m(R_p)H_{n+m}(R) = J_m(R_p)J_{n+m}(R) - iJ_m(R_p)N_{n+m}(R) \quad (4 \cdot 8)$$

$$J_m(R_p)H_{n+m}(R_0) = J_m(R_p) \{(n+m)J_{n+m}(R_0) - R_0J_{n+m+1}(R_0)\} / R_0 - iJ_m(R_p) \{(n+m)N_{n+m}(R_0) - R_0N_{n+m+1}(R_0)\} / R_0 \quad (4 \cdot 9)$$

なお、ここでの $N_{n+m}(R)$ は、Hankel 関数 $H_{n+m}(R)$ の虚部で、Neumann 関数とよばれるものである。

(4・3) から (4・9) 式までのそれぞれの関数の値の変化を調べるにあたって、まず Bessel および Neumann 関数の値の一部を表-2 に示す。R の値としては、円柱径 r_0 が $L/6$ の場合に相当する 1.047 と円柱間隔 p が $2.0L$ の場合に相当する 12.566 の二つと、それ以外に円柱から $1.0L$ と $4.0L$ の距離に相当する 6.283 と 25.133 の二つの場合を選んである。また $J_n(R)$ や $N_n(R)$ の値は、有効数字三桁で表示しているが計算上では五桁までとっている。Bessel 関数 $J_n(R)$ は、 n の値の変化に対して減衰振動

的な変化を示し零に近づいていく。一方、Neumann 関数 $N_n(R)$ は、同様に減衰振動的な変化を示すが、 n の増加に対して非常に大きくなり無限大に近づいていく。また n がある程度以上大きな値の場合には、 $N_n(R)$ と $10 \times J_n(R)$ の逆数とが同じオーダーの値となっている。この場合、 $1/J_n(R)$ と $N_n(R)$ がそれぞれ非常に大きな値をとるときには、その積 $J_n(R) \times N_n(R)$ の計算誤差が大きくなるので注意する必要があると思われる。

このような Bessel 関数 $J_n(R)$ と Neumann 関数 $N_n(R)$ の n に対する値の変化を考えると、(4・3) 式で示される μ_n は、 n の増加にともなって非常に大きな値となっていく。したがってこの場合、(4・4) 式の値は零に近づいていく。また $R > R_0$ に対しては、 n が大きければ $|N_n(R_0)| > |N_n(R)|$ であるので、(4・5) 式の値も零に近づき、 R が R_0 に比べてはるかに大きければより急激に、すなわち n の小さな値で零に近づく。

これらのことから (4・1) および (4・2) 式の級数の収束は、(4・6) から (4・9) 式の値の変化に関係していると思われる。(i) の型に関係する (4・6) および (4・7) 式で示される $J_m(R)H_{n+m}(R_p)$ と $J_m(R_0)H_{n+m}(R_p)$ の値は、前述の Bessel 関数値を考えると指数 n あるいは m が大きい場合には $J_m(R)N_{n+m}(R_p)$ の値による。表-2 に示している Bessel および

表-2 Bessel および Neumann 関数の値

R	1.047		6.283		12.566		25.133	
関数 n	$J_n(R)$	$N_n(R)$	$J_n(R)$	$N_n(R)$	$J_n(R)$	$N_n(R)$	$J_n(R)$	$N_n(R)$
0	0.744E+00	0.124E+00	0.220E+00	-0.229E+00	0.158E+00	-0.161E+00	0.112E+00	-0.113E+00
2	0.125E+00	-0.154E+01	-0.288E+00	0.153E+00	-0.182E+00	0.135E+00	-0.121E+00	0.104E+00
4	0.296E-02	-0.279E+02	0.316E+00	0.168E+00	0.228E+00	-0.358E-01	0.143E+00	-0.728E-01
6	0.275E-04	-0.196E+04	0.278E+00	-0.363E+00	-0.189E+00	-0.145E+00	-0.161E+00	0.115E-01
8	0.136E-06	-0.295E+06	0.733E-01	-0.909E+00	-0.664E-01	0.246E+00	0.144E+00	0.773E-01
10	0.416E-09	-0.769E+08	0.101E-01	-0.409E+01	0.274E+00	0.751E-01	-0.564E-01	-0.156E+00
12	0.868E-12	-0.307E+11	0.883E-03	-0.353E+02	0.236E+00	-0.259E+00	-0.900E-01	0.144E+00
14	0.131E-14	-0.174E+14	0.534E-04	-0.477E+03	0.932E-01	-0.547E+00	0.174E+00	0.129E-01
16	0.150E-17	-0.133E+17	0.238E-05	-0.908E+04	0.231E-01	-0.143E+01	-0.396E-01	-0.177E+00
18	0.135E-20	-0.132E+20	0.820E-07	-0.230E+06	0.402E-02	-0.619E+01	-0.181E+00	0.580E-01
20	0.973E-24	-0.164E+23	0.224E-08	-0.748E+07	0.527E-03	-0.389E+02	0.356E-01	0.200E+00
25	0.602E-32	-0.212E+31	0.118E-12	-0.111E+12	0.121E-05	-0.121E+05	0.159E+00	-0.254E+00
30	0.000E+00	-0.765E+39	0.225E-17	-0.483E+16	0.906E-09	-0.129E+08	0.130E-01	-0.153E+01

Neumann 関数値から、 R が R_p に比べて小さければ絶対値 $|J_m(R)N_{n+m}(R_p)|$ は、指数が増加するにつれて非常に小さくなり零に近づいていく。逆に R が R_p と同程度あるいはそれ以上になると、 $1/J_m(R)$ と $N_m(R_p)$ の値のオーダーが同じの場合、あるいは $N_m(R_p)$ の値の方が大きい場合が多くなり、 $|J_m(R)N_{n+m}(R_p)|$ は指数が増加するにつれて大きな値となっていく。

大型円柱構造物の場合には、 R_0 が比較的大きな値をとるので、領域〔I〕での R_2 が R_p と同じような値をとる Ψ_4 に関しては、その級数は上記理由から非常に収束しにくい。また領域〔II〕での Ψ_4 に関しては、 R_2 が R_p より大きな値となるため収束せず発散する。

結局、領域〔II〕に近い部分を除いた領域〔I〕において (i) の $[J_m(R)H_{n+m}(R_p)]$ の形で表わされる Ψ_3 と Ψ_4 が収束する。

一方、(ii) の型に関係する (4・8) および (4・9) 式で示される $J_m(R_p)H_{n+m}(R)$ と $J_m(R_p)H_{n+m}(R_0)$ の値は、指数 n あるいは m が大きい場合にはそれぞれ $J_m(R_p)N_{n+m}(R)$ と $J_m(R_p) \times N_{n+m+1}(R_0)$ の値と同じオーダーとなる。この型の式の適用領域が $R_2 > R_p$ であり、しかも R_p が大きな値をとれば $J_m(R_p)N_{n+m}(R)$ は、指数がかなり増加しない限りあまり変化しない。また R_0 が R_p に比べて小さければ $|J_m(R_p)N_{n+m+1}(R_0)|$ は、指数の増加に対して大きな値をとるようになる。

結局、領域〔II〕および〔III〕において (ii) の $[J_m(R_p) \times H_{n+m}(R)]$ の形で表わされるポテンシャル式では、 $J_m(R_p)H_{n+m}(R_0)$ の関数をもつ反射項の収束性が悪く、たとえば R_0 と R_p が R に比べて小さくしかも同程度であるような問題に限り級数が収束すると考えられる。

(2) 座標変換による解と直接偏微分による解との比較

Bessel coordinate transformation を適用して速度ポテンシャルを求めた場合、厳密には図-3に示す領域〔II〕の近傍を除く領域〔I〕においてのみそのポテンシャルが収束することがわかった。そこで円柱径 $r_0 = L/6$ 、円柱間隔 $p = 2.0L$ の場合の領域〔I〕での速度ポテン

シャルを求めてみた。この場合、入、反射波のポテンシャル $\Psi_j (j = 1, 2, \dots)$ を Ψ_4 で打ち切って速度ポテンシャル ϕ を求めた。

領域〔I〕での座標変換による解が求まった座標点に対して、2・の (I) において導いた理論級数解および理論近似級数解を座標変換による解と同様に Ψ_4 までのポテンシャルの和として求めた。

以上の座標変換による解と直接偏微分による二つの解からそれぞれの回折係数を求めた。座標変換による解の回折係数を K_{dp} とし、直接偏微分による解のうち理論級数解のそれを K_{d1} とした。また理論近似級数解のそれは K_d としている。各座標点にて K_{d1} および K_d を K_{dp} に対する比でもって表わしたのが図-19である。理

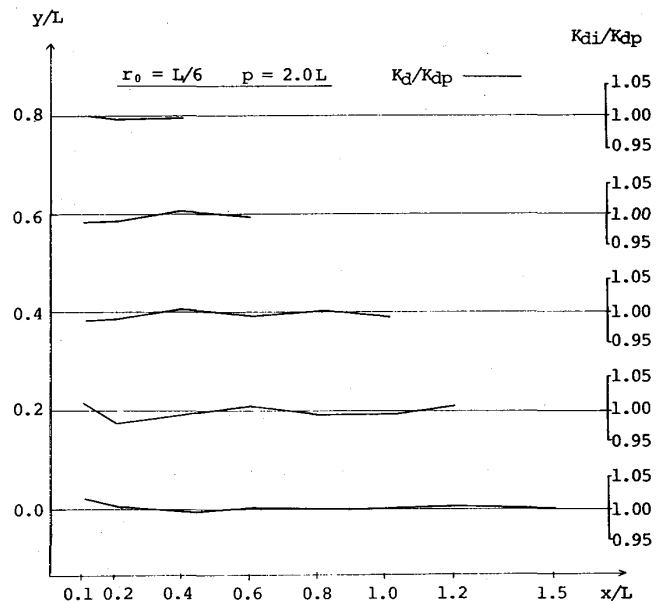


図-19 各座標点における回折係数の変化

論的には K_{d1} は K_{dp} とほとんどの座標点で同じになるはずであるが、解の級数の形の違いなどから K_{d1}/K_{dp} は完全には1.0にならなかった。しかしその値は1.0との差が小さく、図では線がほとんど重なるので表わすことを省略した。また図-19に表わされていない領域〔II〕に近い領域〔I〕における座標点では、 K_{dp} を求めるに際してそのポテンシャルが非常に収束しにくいので検討していない。

図-19から明らかなように、 K_d/K_{dp} はほ

とんど1.0に近く、1.0から最も離れた値でも、0.982である。

次に領域〔Ⅰ〕から〔Ⅲ〕の適当な座標点における K_d/K_{d1} の値を表-3に示した。その値も $x/L=0.1$ に対する各 y 座標における値を除いてはほとんど1.0に近い。さらに円柱径 r_0 が大きい場合の $r_0=L/2$ に対して表-3の $r_0=L/6$ と同様の条件で K_d と K_{d1} を求めてみた。 K_d/K_{d1} の値を示したのが表-4である。円柱径が大きくなったことによって K_d/K_{d1} の値は、1.0から遠ざかる値も目立つ。それは、それぞれの回折係数の値が非常に小さいところの場合がほとんどである。たとえば $x/L=1.0$ で $y/L=0.0$ の座標点では、 K_d が0.135で K_{d1} が0.175であるのでその比 K_d/K_{d1} が0.771となっている。しかしながら $x/L=0.1$ に対する各 y 座標における値を除いては、回折係数 K_d と K_{d1} の分布状況が円柱径 $r_0=L/6$ と同様全体的に非常によく似ている。

ところで、 K_{d1} は(2・21)式からもわかるよ

表-3 直接偏微分による解の
回折係数比 k_d/k_{d1}
(円柱径 $r_0=L/6$ の場合)

$x/L \backslash y/L$	0.1	0.2	0.6	1.0	2.0	4.0
2.0	0.974	0.989	1.008	0.997	1.001	0.998
1.5	1.014	1.016	0.995	1.000	1.000	1.001
1.0		1.001	0.996	1.000	1.003	0.999
0.5	0.964	0.983	0.998	1.002	0.999	0.999
0.0	1.041	1.002	0.996	0.996	0.998	0.999

表-4 直接偏微分による解の
回折係数比 K_d/K_{d1}
(円柱径 $r_0=L/2$ の場合)

$x/L \backslash y/L$	0.1	0.2	0.6	1.0	2.0	4.0
2.0	0.826	1.115	0.954	1.078	1.078	0.980
1.5	0.900	0.916	1.141	1.015	0.967	0.991
1.0			0.955	1.024	0.978	0.985
0.5	0.735	0.911	1.051	0.991	0.981	0.993
0.0	0.946	1.041	0.988	0.771	1.000	0.997

うに、係数 β には特異点が存在する。表-3および4の $x/L=0.1$ の各 y 座標のように、特異点付近ではその値は急激に大きくなる。

以上のように理論から導いた三つの解の特性と比較を示してきたが、いずれの理論解も円柱径が波長に比して大きな場合のMacCamy・Fuchs⁽¹⁾らに始まる回折理論を基としている。そのなかで回折係数 K_d 、すなわち円柱間隔が大きいことから距離 R の変化に対して角度 θ の変化が小さいと考えて導いた理論近似級数解は、領域によっては収束性が悪くなる座標変換による解や係数 β に特異点が存在する理論級数解に比べ、どの領域でもその級数が収束するため厳密に解を求めることができる。さらに理論近似級数解の速度ポテンシャルによって、円柱の相互干渉を十分把握することができたので、そのポテンシャルを二本の大型円柱構造物による波の速度ポテンシャルと考えても差しつかえないと思われる。

5. 超音波による回折実験^{(13), (14)}

超音波による光の回折は、熱的弾性波による光の散乱とともにBrillouinが最初に理論的取扱いをなし、後にDebyeとSears, LucasとBiquardにより独立に発見された現象である。その応用として音速度や吸収の光学的測定法、超音波ストロボスコープ等があり、超音波音場の光学的映像も超音波による光の回折と関連が深い。今回この超音波の光学的映像法により、円柱構造物による波の回折を実験的に調べた。

超音波が水中を伝わると、それに応じて水中に密度の大小を生じ、光の屈折率が変化する。しかし光の透明度については、音波のある部分もない部分も変わらないので、水中を直接眼でみても音波の存在をみとめることはできないが、適当な光学系を使うことによって音波の存在や進路等を眼にみえるようにすることができる。屈折率だけが変化しているような媒体があるとき、その変化の模様を知るものとして昔から有名なものにToeplerのシュリーレン法がある。今回は、シュリーレン法によって超音波の音場の映像を求めた。

(1) シュリーレン法

超音波の音場の映像には、音波面の映像と回折映像がある。回折の映像に使われる一つの方法としてシュリーレン法がある。超音波の場合には回折スペクトルが分離しているため、回折スペクトルの位置に適当なスクリーンを置いて特定の次数の光をさえぎり、または特定の次数を通過させることが容易である。普通のシュリーレン法による光学系の装置は、零次を含めて片側の全部の回折光をさえぎることであるが、特定の次数、たとえば片側の一次だけを通過させたとすると、音場の各点の光の強さ I_1 は、1次のBessel関数 $J_1(v)$ の2乗となり、位相の変化の振幅 v の等しい点の軌跡が同一の明るさの曲線になる。 $J_1(v)$ は v について波打つた変化をするので、 v の極大・極小値 v_1, v_2, v_3, \dots に依じていくつかの等しい明るさの曲線を生じ、音源の二次元的な指向性などを示すことができる。

シュリーレン法で超音波と同じ振動数のストロボスコープ光源を用いれば、音波面の映像が得られる。この場合零次だけをさえぎると、縞の間隔は音の1波長にならずに半波長となり可視度もよくない。零次の大部分の光と片側の回折スペクトルを全部さえぎった場合により結果が得られる。

(2) 実験方法

シュリーレン法を用いた超音波による光の回折実験に関して、まず回折の映像を得るための実験装置の概略を図-20に示す。

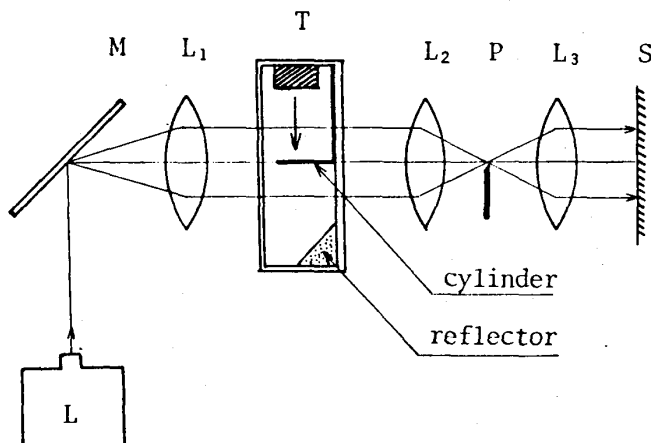


図-20 超音波による回折実験装置

光源 L は、アルゴンレーザー（波長 $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ ）である。その光は、ミラー M を経てレンズ L_1 で平行となり、超音波槽 T を通過してから対物レンズ L_2 を経てその後にあるナイフエッジ P によって0次回折光を消して1, 2, …… 次回折光を取り出して焦点レンズ L_3 によって衝立 S に像を写す。

このような光学系のもとに超音波槽 T において進行超音波を発生させる。この超音波槽は、20cm平方程度の2枚の光学的に歪みのない平面硝子板を窓に持った幅10cmの水槽で、その片側にセラミックの振動子を用いた音源をおき、他端には音波の反射を防ぐ目的で表面に凹凸をつけたシリコンゴムをおいた。音源の周波数 f は約 $1.83 \times 10^6 / \text{sec}$ で、この場合水中の音速 c は約 $1483 \text{m} / \text{sec}$ であるから水中での波長 Λ は約 0.82mm である。この超音波と直角に、光とは平行にして図-20の超音波槽 T に示すようにL字型に曲げた針金を円柱構造物として設けた。

計算結果と比較のために進行超音波の単一円柱および二本の円柱構造物による回折実験を行った。音場におかれる円柱構造物に相当する針金は、直径が 0.8mm であるので、円柱半径が約 $\Lambda / 2$ である単一円柱の場合と、同じ円柱径で円柱間隔を約 2.0Λ の二本の円柱の場合とで実験を行なった。

次に音波面の映像を得るためにシュリーレン法でストロボスコープ光源を用いて実験を行なった。その実験装置の概略を図-21に示す。図-20と特に異なる点は、光源 L からの光にストロボスコープ発生装置 T_1 を設けているところ

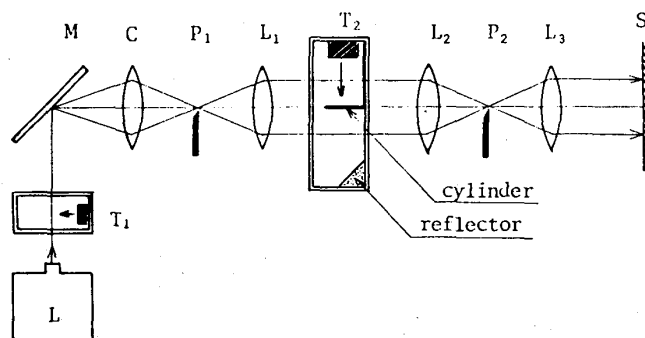


図-21 ストロボスコープ光源を用いた超音波による回折実験装置

である。その他の実験条件は、前述の回折の映像が得られたものと同じである。ただし、二本の円柱の場合には円柱間隔を約 2.0Λ のものと、約 3.0Λ のものと2種類で実験を行なった。

(3) 実験結果と考察

超音波による図-20の光学系のもとで実験を行なった結果、単一円柱および二本の円柱の場合のそれぞれの回折の映像は写真-1、写真-2となった。写真-1には円柱の余分な影が写っ

ているが、写真-1 および 写真-2 とともに濃淡の曲線があらわれ、回折が円柱の前面から背後の領域へと広がっていく二次元的な分布を示していることが定性的にわかる。しかも写真-1と写真-2を比べてみると、二本の円柱の場合の結果は、単一円柱のものをほぼ重ね合わせたような形となっている。

ストロボスコープ光源を用いた図-21の光学系のもとで実験を行なった結果は、写真-3、4、5である。

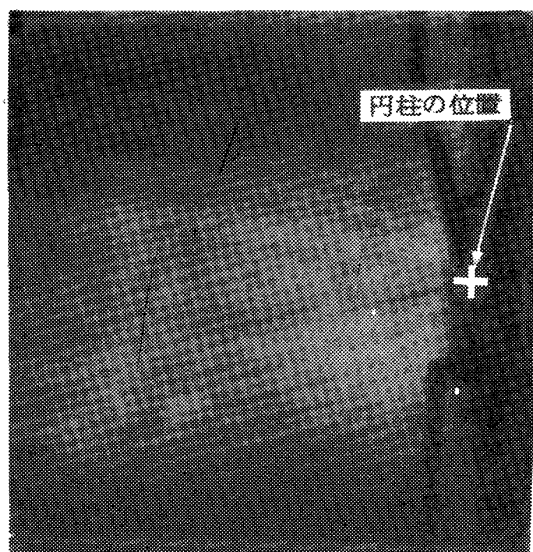


写真-1 回折の映像 (円柱径 $r_0 = \Lambda / 2$ の単一円柱の場合)

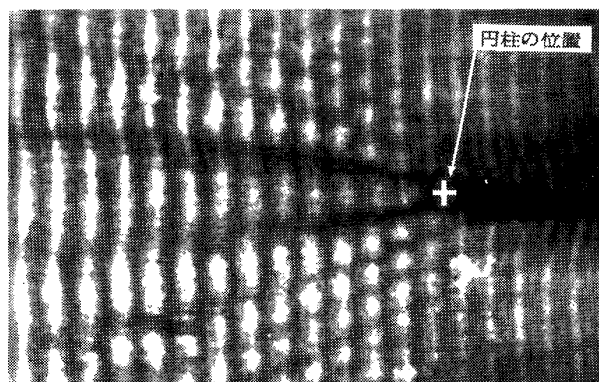


写真-3 音波面と回折の映像 (円柱径 $r_0 = \Lambda / 2$ の単一円柱の場合)

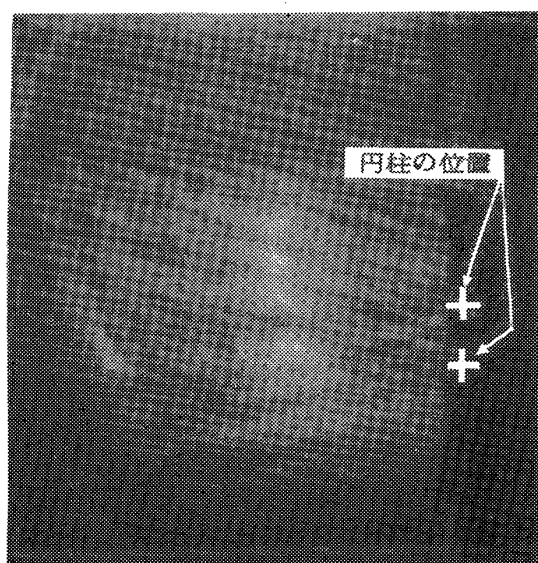


写真-2 回折の映像 (円柱径 $r_0 = \Lambda / 2$, 円柱間隔 $p = 2.0\Lambda$ の二本の円柱の場合)

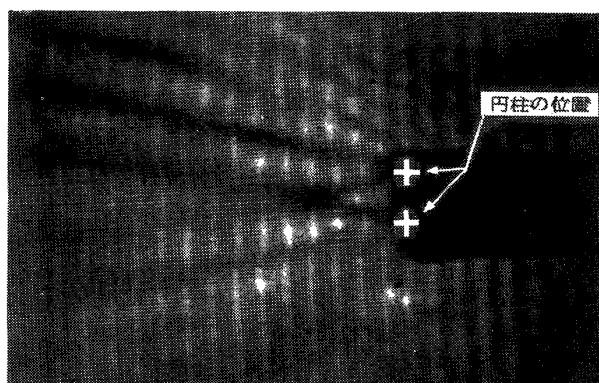


写真-4 音波面と回折の映像 (円柱径 $r_0 = \Lambda / 2$, 円柱間隔 $p = 2.0\Lambda$ の二本の円柱の場合)

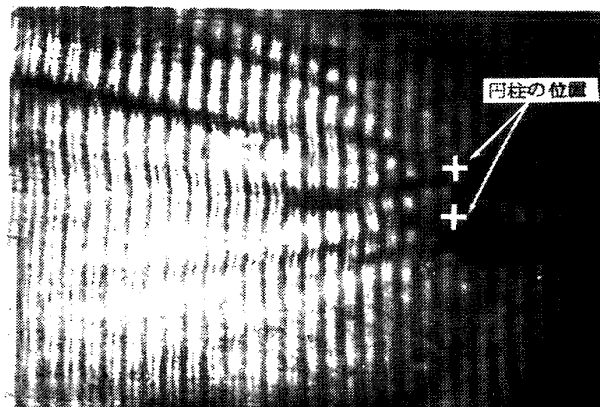


写真-5 音波面と回折の映像 (円柱径 $r_0 = \lambda/2$, 円柱間隔 $p = 3.0 \lambda$ の二本の円柱の場合)

写真-3は単一円柱の場合であって、写真-4と写真-5は二本の円柱の場合で、円柱間隔はそれぞれ約 2.0λ と約 3.0λ である。今回のような光学系を用いたことによって、音波面の映像と同時に回折の映像も得ることができた。音波面の映像結果に関しては、単一円柱の場合あまり波面の変化は顕著でないが、二本の円柱の場合をみると、その波面の変化は単一の場合と比べ顕著となり、とくに両円柱に挟まれた中心軸上でそれが著しい。

一方、回折の映像は、ストロボスコープ光源を用いない場合の結果と同様に、回折の二次元的な分布状況を示していることがわかる。写真-3と写真-4を比べてみると、二本の円柱の場合の結果は、単一円柱の場合のものをほぼ重ね合わせたような形となっている。また濃淡の曲線で表わされているところをみると、各音波面が横方向において急激に変化している。この状況を計算結果と比較検討するために、写真-3および4の条件とほぼ同じである円柱径 $r_0 = L/2$, 円柱間隔 $p = 2.0 L$ の場合について、2.での理論近似級数解で求めた。各座標点にて位相角から波面の峰の部分の位置を求めると、単一円柱および二本の円柱の場合の結果は、図-22および23の実線のようにになった。それぞれの図において峰線のy方向での最急勾配点と思われるところにX印を示した。これらの図の上に写真

-3および4の回折の映像部分を黒くして破線で囲って表わした。実験結果からの回折の線内に計算結果の点があられる。すなわちこのことは、計算結果の各峰線における回折点の実験結果と一致しており、その点を結ぶことによって実験結果の写真にみられる円柱による回折を計算でも表わし得ることを示している。

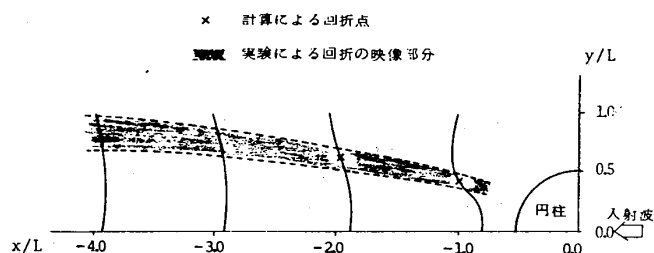


図-22 実験と計算によるそれぞれの回折の比較 (単一円柱の場合)

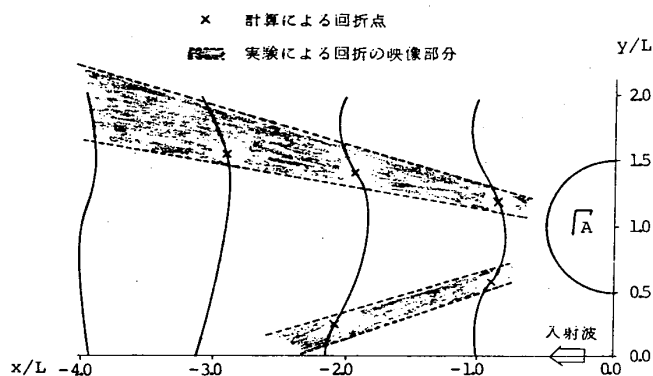


図-23 実験と計算によるそれぞれの回折の比較 (二本の円柱の場合)

以上の超音波による回折実験結果から、本研究で導いた理論近似級数解も円柱構造物による波の回折をかなりの精度で解析可能としていることが想像される。

6. 結 び

波長に対する円柱径の比が大きい場合の二本の大型円柱構造物による波の相互干渉に関する計算方法について検討を行ない、線型波回折理論における理論近似級数解を示した。その解によって円柱間隔の大きい場合の二本の円柱についてのその特性を検討した。さらにその解の妥当性を超音波による回折実験により定性的に確

認した。

従来の円柱群による解は, Bessel coordinate transformation を適用して導かれているため解の収束性に問題点を有していたが, そのポテンシャルの級数の形を変えることによって得られた今回の解から厳密な計算結果を得ることができた。超音波による回折実験結果の音波面や回折の映像との比較結果からもわかるように, 今回の計算結果は回折パターンをより厳密に解折していることが想像される。また解の誘導にあたっての考え方および式が比較的簡単であるので, 要求される計算精度によっては式などの簡略化が可能である。

実際の海の波は, 一つの振幅, 一つの波長および周期をもった変形しない理論的な波ではなく非線型波であるので, それを円柱群による波の変形にも拡張していかなければならない。今回の解は, 確かに線型波回折理論における近似解にすぎないが, 実用的な面で種々の特徴を有しており, 二本からさらに複数本の場合の理論式も導くことができ, 非線型波回折理論へと発展させることを今後の課題としたい。

【 参 考 文 献 】

- (1) Mac Camy, R.C., and R.A. Fuchs : Wave forces on piles ; A diffraction theory, Technical Memo No.69, U.S. Army Corps of Engineerings, Beach Erosion Board, Dec. 1954
- (2) 田中清: 円形島による波浪の回折, 第3回海岸工学講演集, pp. 33-35, 1956
- (3) 合田良実・吉田知司・伊藤喜行: 島堤による波の反射および回折に関する研究, 港湾技術研究所報告, 第10巻, 第2号, 1971
- (4) 井島武士・周宗仁・湯村やす: 任意形状の透過および不透過防波堤による波の散乱, 土木学会論文報告集, 第225号, pp.31-42, 1974
- (5) 梅田真三郎: 波の回折の計算法に関する Review, 福山大学工学部紀要, 第3号, pp. 51-57, 1981
- (6) Chakrabarti, S.K.: Nonlinear wave forces on vertical cylinder, Proc. of ASCE, Vol. 98, No. HY11, pp.1895-1909, 1972
- (7) 山口正隆・土屋義人: 大口径円柱に作用する波圧・波力に及ぼす波の非線型性の影響, 土木学会論文報告集, 第229号, pp. 41-53, 1974
- (8) 大楠丹: 複数本の鉛直円柱に働く波力について, 日本造船学会論文集, 第131号, pp. 53-64, 1972
- (9) Spring, B.H., and P.L. Monkmeyer : Interaction of plane waves with vertical cylinders, Proceedings Fourteenth Coastal Engineering Conference, ASCE, vol. 3, pp. 1828-1847, 1974
- (10) 樫木亨・中村孝幸: 複数円柱構造物の波力干渉効果について(1), 第25回海岸工学講演会論文集, pp. 372-376, 1978
- (11) Massel, S.R. : Interaction of water waves with cylinder barrier, Proc. of ASCE, Vol. 102, No. WW2, pp.165-187, May, 1976
- (12) 岡崎誠・大槻義彦(訳): 特殊関数=その理・工学への応用, 培風館, pp.202-213, 1974
- (13) 実吉純一・菊池喜充・能本乙彦(監修): 超音波技術便覧, 日刊工業新聞社, pp. 174-197 および pp.494-502, 1960
- (14) 五十嵐寿一(編): 音響と振動, 共立出版, pp. 207-273, 1974